Μάθημα 13ο | 28/05/2020

* Να ξέρουμε πως υπολογίζουμε ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

* Είπαμε για προσανατολισμό:

$$\int_{\partial D(a,r)} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz, \quad \gamma(t)=a+re^{it}$$

* $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(a))$. όπου $F'=f$

Επεξήγηση

① Άρα το ολοκλήρωμα της f πάνω από την καμπύλη εξαρτάται μόνο από σημείο που αρχίζει και που τελειώνει η καμπύλη.

② Είναι μια γενίκευση του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού (Θ.Θ.Α.Λ).

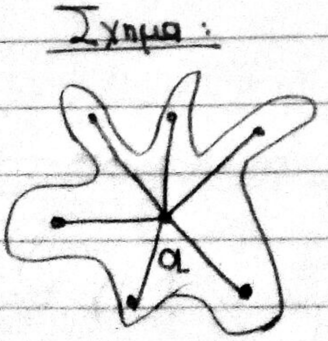
③ Θα μπορούσα να έχω $\int_\gamma F'(z)dz = F'(b) - F'(a)$ με $\gamma(\beta)=b$ και $\gamma(a)=a$.

* $\int_K f(z)dz = 0$, όπου K: κλειστή καμπύλη

Ορισμός: Αστερόμορφο

Υπάρχει ένα κεντρικό σημείο στο οποία κάθε σημείο του D συνδέεται με ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Σχήμα:



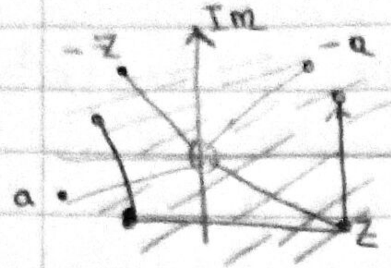
→ D: αστερόμορφο

→ κυρτό ⇒ Αστερόμορφο.

* Κυρτό: σημαίνει οποιαδήποτε δύο σημεία του συνόλου συνδέονται με ευθύγραμμο τμήμα

$\boxed{\text{Αστερόμορφο} \supseteq \text{Συνεκτικό}}$

* <u>Συνεκτικό</u>: Δύο οποιαδήποτε σημεία του συνόλου συνδέονται με πολυγωνική γραμμή

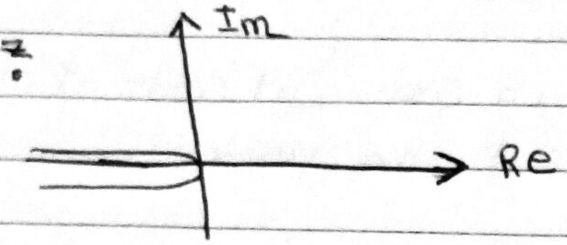


⇝ C^* όχι αστερόμορφο (αλλά φυσικά συνεκτικό)

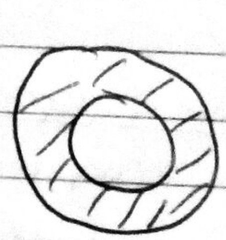
Τα σημεία $z, -z$ και $a, -a$ δεν μπορούν να τα ενώσω με ευθύγραμμο τμήμα γιατί το ευθ. τμήμα περνάει από το 0 το οποίο $\notin$ στο C^*.

Αλλά είναι όμως συνεκτικό.

<u>Αλλά το $C \setminus (-\infty, 0)$ είναι αστερόμορφο:</u>

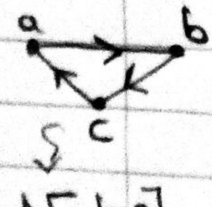


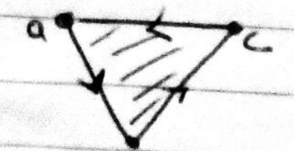
<u>Όχι αστερόμορφο το</u>:



<u>Ορισμός</u>

Όταν έχει οποιαδήποτε $a, b, c \in \mathbb{C}$ το σύνολο:





Το συμβολίζουμε: $\Delta[a,b,c] \subset \mathbb{C}$ το οποίο είναι συμπαγές τρίγωνο.

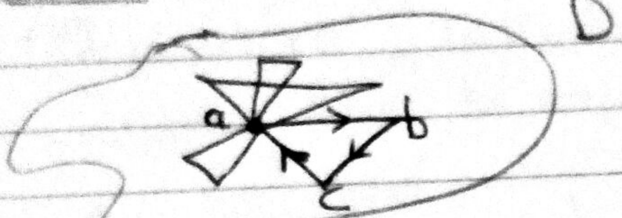
- $\partial\Delta = [a,b] \oplus [b,c] \oplus [c,a]$

Πρόταση 5.2.3

Έστω αστερόμορφος τόπος $D \subset \mathbb{C}$ με κέντρο a με $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής τότε

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$

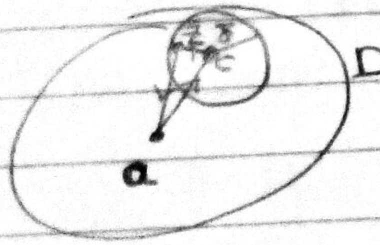
Π.χ.



Εάν ισχύει το παραπάνω τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και έχει ως παράγουσα την:

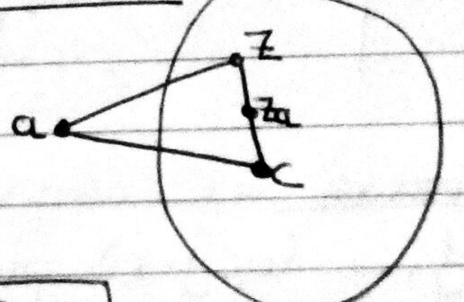
$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta$$

Απόδειξη



$\forall\, z \in D(c,\delta) : \Delta[a,c,z] \subset D$

Zoom in:

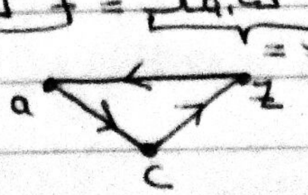


$\boxed{z_a = (1-a)c + az \,,\ a \in [0,1]}$

$\in D(c,\delta) \subset D$ και $\Delta[a,c,z] = \{$ 

Έτσι από υπόθεση:

$$\underbrace{\int_{[a,z]} f}_{=F(z)} = \underbrace{\int_{[a,c]} f}_{=F(c)} + \int_{[c,z]} f$$



Π.χ. 5.9.1

$D \subset \mathbb{C}$: ανοικτό, f. συνεχής, $F' = f$ τότε:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)).$$

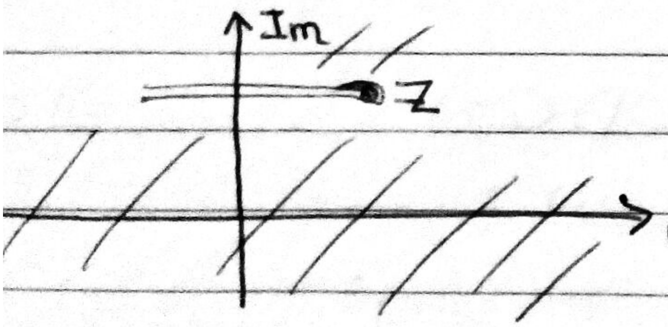
(α) $\int_\gamma \underbrace{(\zeta - z)^m}_{=f(\zeta)} \, d\zeta$

Βρίσκω την παράγουσα της $f(\zeta)$ που είναι: $\frac{1}{m+1}(\zeta - z)^{m+1}$

(β) $$\int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^m} = \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{(\gamma(\alpha) - z)^{m-1}} - \frac{1}{(\gamma(\beta) - z)^{m-1}}\right)$$

(γ) $$\int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - z)} = \log\gamma(\beta) - \log\gamma(\alpha).$$

Σχήμα:



$\mathbb{C} \setminus (-\infty, z)$

Προσοχή:

$\zeta \mapsto \underbrace{\log(\zeta - z)}$ με $z \in \mathbb{C}$ σταθερό.

Είναι ολόμορφη μόνο στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, z)$ με παράγωγο $\frac{1}{z}$

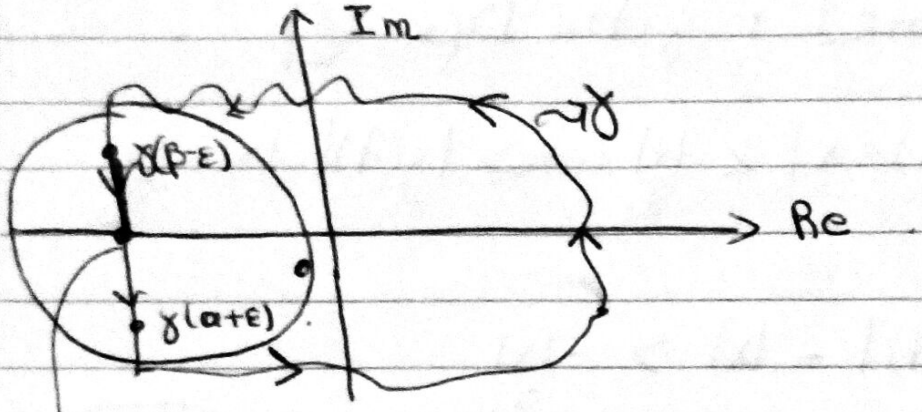
«Δείκτης στροφής κλειστής καμπύλης»

Έστω $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ που περιέχει το 0 στο εσωτερικό της, έχει τον μαθηματικά θετικό προσανατολισμό και τέμνει τον $\mathbb{R}^-$ μόνο μια φορά, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = x < 0$, $\exists\ 0 < \varepsilon_0 < \frac{\beta - \alpha}{2}$,

$\gamma(\alpha + \varepsilon), \gamma(\beta - \varepsilon) \in D(|x|, |x|/2)$

$\operatorname{Im} \gamma(\alpha+\varepsilon) < 0$, $\operatorname{Im} \gamma(\beta - \varepsilon) > 0$.

Σχήμα (για τα παραπάνω):



$\gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = x < 0$.

Έχω λοιπόν:

$$\int_\gamma \underbrace{\frac{1}{z}}_{\substack{\text{συνεχής} \\ + \\ \text{ολόμορφη} \\ \text{για } z \neq 0}} dz$$

Η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z}$ έχει παράγουσα για $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

$$\int_\gamma 1/z \, dz = \int_{\gamma|[\alpha, \alpha+\varepsilon]} \frac{1}{z} dz + \int_{\gamma|[\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon]} \frac{1}{z} dz + \int_{\gamma|[\beta-\varepsilon, \beta]} \frac{1}{z} dz$$

$$\int_{\gamma|[\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon]} \frac{1}{z} dz = \operatorname{Log} \gamma(\beta - \varepsilon) - \operatorname{Log} \gamma(\alpha + \varepsilon).$$

$$\left|\int_{\gamma|[a,a+\varepsilon]} \frac{1}{z}\,dz\right|,\ \left|\int_{\gamma|[\beta-\varepsilon,\beta]} \frac{1}{z}\,dz\right| \leq \frac{2\|\gamma'\|\varepsilon}{|x|} \to$$ Πως προκύπτει αυτό ???

$$\left|\int_{\gamma|[a,a+\varepsilon]} \frac{1}{z}\,dz\right| = \left|\int_a^{a+\varepsilon} \frac{1}{\gamma(t)}\,\gamma'(t)\,dt\right|$$

$$\leq \int_a^{a+\varepsilon} \frac{1}{|\gamma(t)|}\,\underbrace{|\gamma'(t)|}_{\leq \|\gamma'\| = \max_{i=1,\dots,n} \max|\gamma'|[t_{i-1},t_i]| < \infty}\,dt \overset{*}{\leq}$$

$*\ t \in [a,a+\varepsilon] : \gamma(t) \in D\left(x, \frac{|x|}{2}\right)$

$$\Rightarrow |\gamma(t)-x| < \frac{|x|}{2} \Rightarrow |\gamma(t)|-|x| < \frac{|x|}{2}$$

$$\Rightarrow |\gamma(t)| - |x| > -\frac{|x|}{2}$$

$$\Rightarrow |\gamma(t)| > \frac{|x|}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\gamma(t)|} < \frac{2}{|x|}$$

$\operatorname{Arg}\gamma(\beta-\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \pi.$

$\operatorname{Arg}\gamma(a-\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\pi.$

Άρα

$$\overset{*}{\leq} \frac{2}{|x|}\cdot\|\gamma'\|\cdot\int_a^{a+\varepsilon} dt$$

Αν έχω μια κλειστή καμπύλη που κάνει μια βόλτα γύρω από το 0 το $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$ απειρίζεται. Άρα την ολοκληρώνω

σε μία καμπύλη που δεν έχει το 0 και σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία

Προκύπτει: $\boxed{\int_{\gamma} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i}$